Perspective « Comprendre » :
Mode d'emploi des animations

Sommaire :

I. Un peu de vocabulaire
II. Image d'une droite
   a) Cas général
   b) Cas d'une droite perpendiculaire au plan du tableau
III. Image d'un faisceau de droites parallèles
   a) Cas général
   b) Cas de droites du géométral faisant un angle de $\pi/4$ avec la ligne de terre
IV. Constructions dans le plan du tableau
   a) tracé de l'image d'un carré dont un des côtés est porté par la ligne de terre
   b) tracé de l'image d'un cube dont une des faces est dans le plan du tableau et portée par la ligne de terre
   c) tracé de l'image d'un point du géométral repéré par sa position par rapport à la ligne de terre
   d) tracé de l'image d'un carré contenu dans le géométral
   e) tracé de l'image d'un point

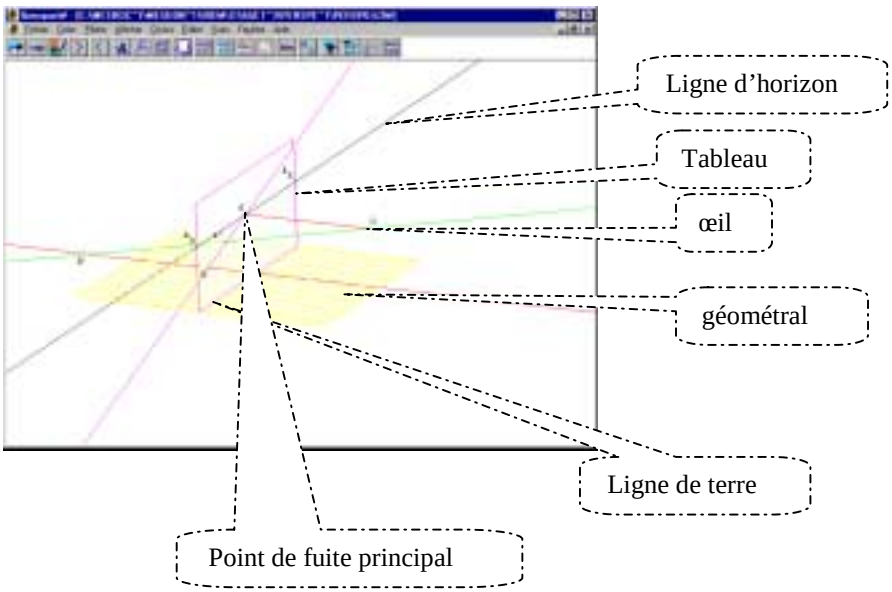
Le paradoxe : représenter des situations de perspective artistique en perspective cavalière. Mais n'oublions pas que le but ultime est le tracé direct d'objets en perspective.

La perspective (ou perspective linéaire ou artistique) est l'un des moyens de représenter les objets de l'espace. La position de l'œil étant fixée, le tableau étant lui aussi fixé, l'objet dessiné est l'ensemble des points intersections du plan du tableau et des rayons visuels joignant l'œil à l'objet à représenter (voir le Portillon de Dürer).
En général l'objet à dessiner est posé sur un **plan horizontal** ou **géométral** et le plan du tableau est perpendiculaire au géométral (on se contentera de cela).
Derrière ce type de représentation, il y a une transformation mathématique, la projection centrale, qui a donné naissance à un type de géométrie, la géométrie projective.

Le problème est le suivant : Quelles sont les règles à connaître pour dessiner directement dans le plan du tableau des objets simples qui sont repérés par rapport au géométral ? Par quelles propriétés de la projection centrale sont-elles justifiées ?

Pour toutes les animations :
Lire les commentaires (touche F3), regarder ce qui est pilotable dans le menu et faire varier les paramètres.

I. Un peu de vocabulaire



Le plan du géométral est xoy et le plan du tableau T est xoz.

Ligne de terre : intersection du géométral avec (T), plan du tableau.
Ligne d'horizon : intersection d'un plan parallèle au géométral et passant par O (œil) avec le plan du tableau.
Point de fuite principal : projection orthogonale du point O sur le plan du tableau.

Pour dessiner un point M de l'espace dans (T), il suffit de tracer le point d'intersection m du rayon visuel (OM) avec (T). Voir **per000.g3w**.

Mathématiquement, on voit donc que la perspective artistique correspond à une projection centrale de centre O sur un plan (T).
- Les points du plan (T') parallèle à (T) passant par O n'ont pas d'image.
- Les points de (T) sont invariants.

II. Image d'une droite

a) Cas général

Si la droite passe par O alors son image est un point.

Si (D) est une droite qui ne passe pas par O, on note (d) la droite intersection du plan (D,O) avec (T).
- Si (D) est parallèle à (T), alors (d) est parallèle à (D). En particulier, si la droite (D) est incluse dans (T) alors elle est invariante.
- Si (D) n'est pas parallèle à (T), elle coupe (T') en un point O' qui n'a pas d'image. (On peut dire aussi que l'image de ce point est à l'infini.) Tout autre point de (D) a une image sur (d).
  Réciproquement tout point de (d) est l'image d'un point de (D), excepté le point Z, intersection de la parallèle à (D) passant par O et du plan (T). Z peut être considéré comme image « des points à l'infini ».
  On peut noter que la transformation ne conserve pas la connexité.

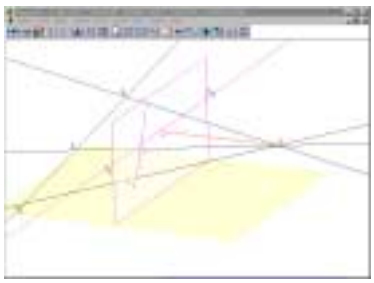
Commentaires sur persp01.g3w :

1) Image d'une droite parallèle au plan du tableau :
commande a
(AB) est parallèle au plan (T). A est pilotable par son abscisse et B par son ordonnée.

2) Image d'une droite sécante au plan du tableau en I
commande b
R et R1 définissent une droite sécante au plan du tableau en I.
O' est le point de cette droite qui n'a pas d'image.

commande c
On fait apparaître l'image r de R.
commande d
On choisit un point R' libre sur (RR1), et on construit son image r'.
L'animation permet de voir l'image de (RR1) mais aussi d'observer que la transformation ne conserve pas la connexité.
commande z
On fait apparaître l'origine Z des deux demi-droites ouvertes, image(s) de la droite (RR1).

Commentaires sur persp02.g3w :



Cette transformation ne conserve pas non plus le milieu et a fortiori pas le barycentre. Ce qui va compliquer les constructions.

On peut se placer dans le plan T1 défini par O, R et R1 pour s'en persuader.
Pour les constructions, on supposera que l'objet du dessin est situé dans le demi-espace délimité par (T') , plan parallèle à (T) passant par O (œil) et contenant le tableau. Ce qui est la moindre des choses ! !

En fait on peut dans une première approche se restreindre au demi- espace (E) délimité par (T) et ne contenant pas O. Dans ce cas, il nous suffit de savoir que :

- ***l'image d'une droite parallèle au plan du tableau est une droite qui lui est parallèle et est incluse dans le tableau ;***
- ***l'image d'une demi-droite (D) de (E) sécante avec le plan du tableau en I est le segment semi-ouvert [IZ[de (T), où Z est l'intersection de la parallèle à (D) passant par O et du plan (T).***

Cela ne restreint en rien la généralité de ce qui suit.

b) Cas d'une droite perpendiculaire au plan du tableau

Si la droite passe par O, son image est **f, projection orthogonale de O sur (T).**

Sinon, l'image d'une droite (D) perpendiculaire à (T) en I est contenue dans la droite (If). (En effet (Of) est parallèle à (D), donc f est le point Z défini précédemment.)
Plus précisément : l'image d'une demi-droite contenue dans (E) et perpendiculaire au plan du tableau en I est le segment [If[.
Le point f appelé **point de fuite principal**.

Commentaires sur persp03.g3w :

(D) est une droite perpendiculaire au plan du tableau en I.
En modifiant à la souris la position de S on obtient différentes positions de (D).
S' est un point libre de la droite (D).

III. Image d'un faisceau de droites parallèles

a) Cas général

● Des **droites parallèles entre elles et parallèles au géométral** (mais pas au plan du tableau) **ont des images qui convergent en un même point Z**, intersection de la parallèle à ces droites passant par O avec le plan du tableau. Ce point est **situé sur la ligne d'horizon**.
En effet, la droite (OZ) est parallèle au géométral, donc elle est contenue dans le plan parallèle au géométral passant par O, plan qui coupe le plan du tableau suivant la ligne d'horizon.

Commentaires sur persp04.g3w :

(AB) est une droite parallèle au géométral et sécante au plan du tableau en I.
(D) est parallèle à (AB).

En modifiant à la souris la position de S on obtient différentes positions de (D).
M est un point libre de la droite (AB).
N est un point libre de la droite (D).
La ***commande z*** permet de faire apparaître
la parallèle d à (AB) passant par O,
le point Z intersection de (d) et du plan (T),
puis les segments [IZ[et [JZ[, images des deux demi-droites.

● Si les **droites** du faisceau sont **parallèles entre elles mais pas au géométral** (ni au plan du tableau) alors leurs images **convergent toujours en un même point**, intersection de la parallèle à ces droites passant par O avec le plan du tableau, mais **qui n'est pas sur la ligne d'horizon.**

Commentaires sur persp05.g3w :

(AB) est une droite non parallèle au géométral et sécante au plan du tableau en I.
(D) est parallèle à (AB).
En modifiant à la souris la position de S on obtient différentes positions de (D).
M est un point libre de la droite (AB).
N est un point libre de la droite (D).
La ***commande z*** permet de faire apparaître
la parallèle d à (AB) passant par O,
le point Z intersection de (d) et du plan (T),
puis les segments [IZ[et [JZ[, images des deux demi-droites.

b) Cas de droites du géométral faisant un angle de π/4 avec la ligne de terre

Soit (D) une droite du géométral qui fait un angle de π/4 avec la ligne de terre en un point R.
L'image de la demi-droite de (D) contenue dans le demi-espace (E) est le segment [RD_1[, où D_1 est l'intersection de la parallèle à (D) passant par O avec le plan du tableau.
La droite (OD_1) est contenue dans le plan parallèle au géométral et passant par O, donc *D_1 appartient à la ligne d'horizon*, intersection de ce plan avec (T).

Les droites (D) et (OD_1) étant parallèles, tout comme la ligne de terre et la ligne d'horizon, la droite (OD_1) fait un angle de π/4 avec la ligne d'horizon. Le triangle OfD_1 est rectangle isocèle en f, et **Of = fD_1.**
L'image de toute droite du géométral parallèle à D converge aussi vers le point D_1.

Soit D1 et D2 les points de la ligne d'horizon tels que OD1= OD2 =Of. Ces points sont appelés **points de distances.**
Les images de toutes les droites de l'espace parallèles à une droite qui fait un angle de **π/4** (est ou ouest) avec la ligne de terre convergent vers un des points de distance D1 ou D2.

Commentaires sur persp06.g3w :

O a pour coordonnées (l,u,3) avec l et u pilotables au clavier.
R a pour coordonnées (n,0,0) avec n pilotable au clavier.
R' est un point libre de la demi droite du plan géométral faisant 45° avec la ligne de terre.
La trace de r' donne l'image de la demi droite du plan géométral faisant 45° avec la ligne de terre.

La ***commande a*** fait apparaître les points de distance D1 et D2.
La ***commande b*** fait apparaître la parallèle passant par O à la demi-droite du plan géométral faisant 45° avec la ligne de terre. Celle-ci coupe la ligne d'horizon en D1.

Ce qui a été fait pour π/4 est valable pour tout angle α. Autrement dit, toutes les images des droites parallèles à une droite du géométral qui fait un angle α (par exemple ouest) avec la ligne de terre convergent vers un même point D' situé sur la ligne d'horizon.
Ce point est facile à construire: il est sur la ligne d'horizon et situé à $d \times \tan \alpha$ si d est la distance de l'œil au tableau.

Tous ces résultats vont nous permettre de construire directement dans le plan du tableau les images de carrés, damiers, cubes, etc.

IV. Constructions dans le plan du tableau

a) Tracé de l'image d'un carré dont un des côtés est porté par la ligne de terre

● **Étude de la situation « dans l'espace »**
ABCD est un carré dont un côté [AB] est porté par la ligne de terre.
Les droites (AD) et (BC) perpendiculaires à la ligne de terre ont leurs images qui convergent en f : tracé de [Af[et [Bf[.
La diagonale [AC] a son image qui passe par A et qui converge vers D_1 : tracé de [AD_1[. L'intersection de ce segment avec [Bf[donne l'image c' de C.
Pour obtenir l'image d' de D, on peut faire la même manœuvre ou encore tracer la parallèle à (CD), donc à (AB), qui passe par c'.

Commentaires sur persp07.g3w :

La ***commande i*** fait apparaître étape par étape l'image du carré ABCD, puis les tracés de [BD2], [OC] et [OD] à titre de vérifications.

REMARQUE : on peut alors obtenir facilement **l'image du cercle inscrit dans le carré.**

Étude de la situation spatiale :
C'est une ellipse, section d'un cône oblique de sommet O et de base le « vrai » cercle avec le plan du tableau.

Commentaires sur persp08.g3w :

On peut voir cette ellipse en vraie grandeur en se plaçant dans le plan xoz.
Faire varier la position de f pour observer les axes de l'ellipse.

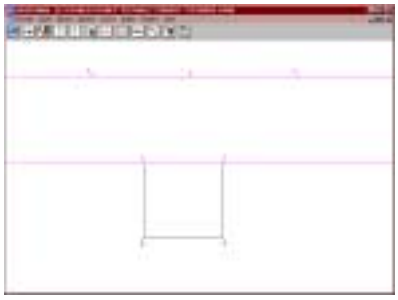
● **Étude de la situation dans le plan du tableau**

On peut maintenant construire directement l'image du carré dans le plan du tableau, à condition de connaître la position du côté [AB] sur la ligne de terre, et la position de l'œil (donc la ligne d'horizon, le point f, et les points D_1 et D_2).
Pour effectuer cette construction, on fait subir au géométral une rotation de 90° autour de la ligne de terre de façon à amener le carré initial dans le plan du tableau, en dessous de la ligne de terre.

Dans l'animation, le carré obtenu après rotation est appelé BAEF.

Commentaires sur PCARRE.g2w :

Utiliser la ***commande a*** pour faire apparaître les différentes étapes du tracé.
La position des points f, B et A sur les lignes d'horizon et de terre, peut être modifiée à la souris.



On peut piloter au clavier :
la hauteur de la ligne d'horizon (réel a),
la distance de O au plan du tableau, donc les points de distance (réel r).

Observer la déformation de l'image du carré.

b) Tracé de l'image d'un cube dont une des faces est dans le plan du tableau, étant portée par la ligne de terre

On se place directement dans le plan du tableau.
La face ABHG est invariante.
On trace comme précédemment l'image de la face carrée contenue dans le géométral : on obtient le quadrilatère ABCD.
Il suffit ensuite de savoir que les images des droites perpendiculaires au géométral convergent vers f, et que les images de droites parallèles à une droite faisant un angle de 45° avec la ligne de terre convergent vers un des points de distance (ou que des droites parallèles au tableau ont des images qui leur sont parallèles).

Commentaires sur pcube.g2w :

La ***commande a*** fait apparaître les différentes étapes du tracé.

La position des points f, A et B, sur les lignes d'horizon et de terre, peut être modifiée à la souris.
On peut piloter au clavier :
la hauteur de la ligne d'horizon (réel a),
la distance de O au plan du tableau, donc les points de distance (réel r).

Observer la déformation de l'image du cube.

c) Tracé dans le plan du tableau de l'image d'un point du géométral repéré par sa position par rapport à la ligne de terre

Il suffit de considérer ce point comme sommet d'un carré dont un côté est sur la ligne de terre.

On rabat le point R dans le plan du tableau. On construit son projeté orthogonal R' sur la ligne de terre. Il suffit alors de considérer R comme sommet d'un carré $RR'k_1$...
L'image de [RR'] est contenue dans [R'f]. Celle de $[Rk_1]$ dans $[k_1D_2]$. On obtient ainsi l'image du point R notée r.
(Par abus de langage, on confond le point R du géométral et le point obtenu dans le plan du tableau après rabattement.)

Commentaires sur poin01.g2w :

Utiliser la ***commande a*** pour faire apparaître les différentes étapes du tracé.
La position du point f sur la ligne d'horizon peut être modifiée à la souris.
On peut piloter au clavier :
la hauteur de la ligne d'horizon (réel a),
la distance de O au plan du tableau, donc les points de distance (réel d).

d) Tracé dans le plan du tableau de l'image d'un carré contenu dans le géométral

On trace l'image de chacun des sommets avec la méthode du paragraphe c).

Commentaires sur pcarr3.g2w :

On peut piloter au clavier la hauteur de la ligne d'horizon (réel a),
On peut modifier à la souris la position du point f et celle des points D1 et D2.
commande a : pilotage de S, T et R avec U fixe
commande d : pilotage de T, S et U avec R fixe

e) Construction de l'image d'un point quelconque de l'espace

● **Étude de la situation « dans l'espace »**
On considère les projetés orthogonaux S et R' du point R respectivement sur le géométral et sur le plan du tableau.
On construit l'image du point S du géométral : on obtient s.
L'image de [R'R) est [R'f[.
L'image de (RS) est la parallèle à (RS), et donc à (S'R'), passant par l'image s de S.
Et l'image r de R est l'intersection des deux images.

Commentaires sur persp10.g3w :

La ***commande b*** fait apparaître, étape par étape, la construction de l'image d'un point R.
La ***commande a*** fait apparaître, à titre de vérification, le tracé de la droite (OR).

● **Étude de la situation dans le plan du tableau**
On connaît les points S et R', projetés respectifs du point R sur le géométral et sur le plan du tableau.
On utilise les résultats précédents.

Commentaires sur poin03.g2w :

S est le projeté orthogonal de R sur le géométral rabattu dans le plan du tableau et R' est le projeté orthogonal de R sur le plan du tableau.

Utiliser la ***commande b*** pour faire apparaître le tracé par étape de l'image r de R.

La position du point f sur la ligne d'horizon peut être modifiée à la souris.
On peut piloter au clavier :
la hauteur de la ligne d'horizon (réel a),
la distance de O au plan du tableau, donc les points de distance (réel d),
la position de R par rapport au plan du tableau (point libre R').